Принцип максимума Понтрягина для задач оптимального управления с бесконечным горизонтом в экономике

С.М. Асеев
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

Школа-конференция “Неголономные дни в Переславле”
г. Переславль-Залесский, 26–30 августа 2024 г.

Пусть заданы непустое выпуклое открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$, непустое множество $U \subset \mathbb{R}^m$, функции

$$f : [0,\infty) \times G \times U \to \mathbb{R}^n, \qquad f^0 : [0,\infty) \times G \times U \to \mathbb{R}^1$$

и начальное состояние $x_0 \in G$.

Задача (P):

$$J(x(\cdot),u(\cdot)) = \int_0^{\infty} f^0(t,x(t),u(t))\,dt \to \max\,,$$

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)), \qquad x(0) = x_0,$$

$$u(t) \in U.$$

[1] Ramsey F.P. A mathematical theory of saving. Economic J., 1928, vol. 38, no. 152, pp. 543–559.

Специфика задач оптимального управления в экономике

1) Координаты $x^1, \ldots, x^n$ — количества различных видов капитала (производственные фонды), т.е. $x = (x^1, \ldots, x^n)$ — вектор капитала.
2) Координаты $u^1, \ldots, u^m$ — величины различных инвестиций (инвестируемые ресурсы), т.е. $u = (u^1, \ldots, u^m)$ — вектор инвестиций.
3) Процесс управления рассматривается на бесконечном интервале времени $[0, \infty)$.
4) Начальное состояние $x(0)$, как правило, фиксировано, т.е. $x(0) = x_0$.
5) Конечное состояние (на бесконечности), как правило, свободно.
6) Интегрант $f^0(\cdot, \cdot, \cdot)$ часто имеет вид
$$f^0(t, x, u) = e^{-\rho t} g(x, u), \qquad \text{где} \quad \rho > 0.$$
7) Экономические задачи обычно ставятся, как задачи максимизации заданного функционала полезности $J(x(\cdot), u(\cdot)) \to \max$.

Пример 1. Неоклассическая модель оптимального экономического роста

Пусть замкнутая экономика, производит в каждый момент $t \geq 0$ некоторый однородный продукт, который может как инвестироваться, так и потребляться. В каждый момент t количество произведенного продукта $Y(t) > 0$ является функцией текущих количеств капитала $K(t) > 0$ и трудовых ресурсов $L(t) > 0$:

$$Y(t) = F(K(t), L(t)).$$

Производственная функция $F(\cdot, \cdot)$ определена на множестве

$$G = \{(K, L) \in \mathbb{R}^2 : \; K > 0, \; L > 0\}.$$

Пусть функция $F(\cdot, \cdot)$ положительно однородна первой степени, т.е.

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda F(K, L), \qquad \lambda > 0, \quad K > 0, \quad L > 0.$$

Функция Кобба-Дугласа:

$$F(K, L) = AK^{\alpha_1} L^{\alpha_2}.$$

Здесь $A > 0$ — производственный параметр (технологический коэффициент), $\alpha_1 > 0$ — эластичность выпуска по капиталу, $\alpha_2 > 0$ — эластичность выпуска по труду, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

$K(t) > 0$ и $L(t) > 0$ — имеющиеся в момент $t \geq 0$ количества капитала и рабочей силы соответственно,

Производственная функция с постоянной эластичностью замещения:

$$F(K, L) = A \left(\alpha_1 K^r + \alpha_2 L^r\right)^{\frac{1}{r}},$$

где $A > 0$, $-\infty < r \leq 1$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$ и $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

Можно проверить, что при $r \to 0$ она стремится к производственной функции Кобба-Дугласа.

В момент $t \geq 0$ часть

$$I(t) = u(t)Y(t), \quad 0 \leq u(t) < 1,$$

инвестируется в производство, а оставшаяся часть

$$C(t) = (1 - u(t))Y(t)$$

потребляется. Здесь $u(t) \in U = [0, 1)$ — величина управления.

Динамика капитала описывается уравнением

$$\dot{K}(t) = I(t) - \delta K(t) = u(t)Y(t) - \delta K(t), \qquad K(0) = K_0 > 0,$$

где $\delta > 0$ — норма амортизации капитала.

Динамика трудовых ресурсов описывается уравнением

$$\dot{L}(t) = \mu L(t), \qquad L(0) = L_0 > 0.$$

где $\mu > 0$ — темп роста трудовых ресурсов.

Положим $x = K/L$ и $f(x) = F(x,1)$, $x > 0$. Тогда

$$\frac{Y(t)}{L(t)} = \frac{F(K(t),L(t))}{L(t)} = F\left(\frac{K(t)}{L(t)},1\right) = f(x(t)), \qquad t \geq 0.$$

Тогда для переменной $x(t) = K(t)/L(t)$ (капиталовооруженность рабочей силы) получаем

$$\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}\frac{K(t)}{L(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{L(t)} - \frac{K(t)}{L^2(t)}\dot{L}(t) = u(t)\frac{Y(t)}{L(t)} - (\mu+\delta)\frac{K(t)}{L(t)}.$$

Получили одномерную управляемую систему

$$\dot{x}(t) = u(t)f(x(t)) - (\mu+\delta)x(t), \qquad x(0) = x_0,$$

$$u(t) \in U = [0,1).$$

Пусть $c(t) = C(t)/L(t)$ — мгновенное потребление на душу населения. Тогда

$$c(t) = \frac{(1 - u(t))Y(t)}{L(t)} = (1 - u(t))f(x(t)), \qquad t \geq 0.$$

Рассмотрим следующую функцию мгновенной полезности:

$$g(c(t)) = \begin{cases} \frac{c(t)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}, & \sigma > 0, \quad \sigma \neq 1, \\ \ln c(t), & \sigma = 1 \end{cases}, \qquad t \geq 0.$$

Пусть $\rho > 0$ — (субъективный) коэффициент дисконтирования.

Приходим к следующей задаче (P):

$$J(x(t), u(t)) = \int_0^\infty e^{-\rho t} g\left((1 - u(t))f(x(t))\right)\, dt \to \max,$$

$$\dot{x}(t) = u(t)f(x(t)) - (\mu + \delta)x(t), \qquad x(0) = x_0,$$

$$u(t) \in U = [0, 1).$$

Здесь, $x_0 \in G = (0, \infty)$.

Пример 2. Простейшая модель предприятия

Рассмотрим идеализированное предприятие производящее и продающее на рынке некоторый однородный продукт.
Динамика производственных фондов (капитала) $x(\cdot)$ описывается системой

$$\dot{x}(t) = u(t) - \delta x(t), \qquad x(0) = x_0,$$
$$u(t) \in U = [0, u_{\max}].$$

Здесь $\delta > 0$ — норма амортизации капитала, $x_0 > 0$ — начальное количество капитала, $u_{max} > 0$ — максимальная возможная скорость установки капитала.

Мы пренебрегаем временем, необходимым для установки оборудования $u(t)$ и его дискретной природой.

Предположим, что единица капитала производит единицу продукта в единицу времени: $y(t) = x(t)$, $t \geq 0$.
Пусть максимальное количество продукта $N(\pi)$, которое может быть продано по цене $\pi \geq 0$ определяется равенством

$$N(\pi) = \frac{\bar{\pi} - \pi}{b}.$$

Здесь $\bar{\pi} > 0$ — максимальная цена, по которой продукт может быть продан, $\bar{\pi}/b > 0$ — объем рынка т.е. — максимальное количество товара, которое может быть продано в каждый момент времени.

Тогда максимальная цена $\pi(t)$, при которой весь произведенный продукт $y(t) = x(t)$ будет продан, находится из равенства

$$N(\pi(t)) = y(t) = x(t) \qquad \Leftrightarrow \qquad \pi(t) = \bar{\pi} - bx(t).$$

Доход предприятия в момент t есть величина

$$\pi(t)y(t) = \pi(t)x(t) = \bar{\pi}x(t) - bx^2(t).$$

Пусть $\zeta > 0$ — стоимость производства единицы продукта, $c > 0$ — стоимость единицы (цена) капитала и $a = \bar{\pi} - \zeta > 0$.

Тогда мгновенная прибыль $g(x(t), u(t))$ предприятия определяется равенством

$$\begin{aligned} g(x(t), u(t)) &= \pi(t)x(t) - \zeta x(t) - cu(t) \\ &= \bar{\pi}x(t) - bx^2(t) - \zeta x(t) - cu(t) = ax(t) - bx^2(t) - cu(t). \end{aligned}$$

Пусть $z(t)$ — стоимость денежной единицы в момент $t \geq 0$, $\rho > 0$ и

$$\frac{\dot{z}(t)}{z(t)} = -\rho, \qquad z(0) = 1.$$

Тогда

$$z(t) = e^{-\rho t}, \qquad t \geq 0.$$

Приходим к следующей задаче оптимального инвестирования в основные производственные фонды предприятия.

Задача (P):

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^{\infty} e^{-\rho t}\big[ax(t) - bx(t)^2 - cu(t)\big]\, dt \to \max,$$

$$\dot{x}(t) = u(t) - \delta x(t), \qquad x(0) = x_0,$$

$$u(t) \in U = [0, u_{\max}],$$

Здесь $x_0 \in G = (0, \infty)$.

Основные определения

Измеримую по Лебегу функцию $u\colon\ [0,\infty) \to \mathbb{R}^m$: $u(t) \in U$ будем называть **управлением**.

Траектория $x(\cdot)$ — локально абсолютно непрерывное решение дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),$$

определенное в G на некотором интервале $[0,\tau)$, $0 < \tau \leq \infty$.

Пару $(x(\cdot), u(\cdot))$ называют **процессом**, если $\tau = \infty$.

Процесс $(x(\cdot), u(\cdot))$ называется **допустимым**, если $x(0) = x_0$ и функция $t \mapsto f^0(t, x(t), u(t))$ локально интегрируема на $[0,\infty)$, т.е. для любого $T > 0$ интеграл

$$\int_0^T f^0(t, x(t), u(t))\, dt$$

определен.

Определение 1. *Допустимый процесс* $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ – **сильно оптимальный** *в задаче* (P) *если существует конечный предел*

$$J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) = \lim_{T\to\infty} \int_0^T f^0(t, x_*(t), u_*(t))\, dt \in \mathbb{R}^1$$

и для любого другого допустимого процесса $(x(\cdot), u(\cdot))$ *имеем*

$$J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \geq \limsup_{T\to\infty} \int_0^T f^0(t, x(t), u(t))\, dt.$$

Определение 2. *Допустимый процесс* $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ – **конечно оптимальный** *в задаче* (P) *если для любого* $T > 0$ *он оптимален в следующей задаче* (Q_T) *на конечном интервале с фиксированным правым концом:*

$$J_T(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^T f^0(t, x(t), u(t))\, dt \to \max,$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \qquad u(t) \in U,$$

$$x(0) \in M_0, \qquad x(T) = x_*(T).$$

Слабо обгоняющая оптимальность

Определение 3. *Допустимый процесс* $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ – **слабо обгоняюще оптимальный** *в задаче* (P) *если для любого другого допустимого процесса* $(x(\cdot), u(\cdot))$ *выполняется неравенство*

$$\limsup_{T\to\infty} \int_0^T \Big(f^0(t, x_*(t), u_*(t)) - f^0(t, x(t), u(t)) \Big)\, dt \ge 0.$$

Определение 3′. *Допустимый процесс* $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ – **слабо обгоняюще оптимальный** *в задаче* (P) *если для любого другого допустимого процесса* $(x(\cdot), u(\cdot))$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *существует такая последовательность моментов времени* $\{T_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\lim_{i\to\infty} T_i = \infty$, *что*

$$\int_0^{T_i} f^0(t, x_*(t), u_*(t))\, dt \ge \int_0^{T_i} f^0(t, x(t), u(t))\, dt - \varepsilon.$$

Сильная оптимальность $\Rightarrow$ слабая обгоняющая оптимальность

$\Rightarrow$ конечная оптимальность

Условие $(A0)$. *Множество U — борелевское. Для почти всех $t \in [0,\infty)$ производные $f_x(t,x,u)$ и $f_x^0(t,x,u)$ существуют для всех $(x,u) \in G \times U$, а функции $f(\cdot,\cdot,\cdot)$, $f^0(\cdot,\cdot,\cdot)$, $f_x(\cdot,\cdot,\cdot)$, и $f_x^0(\cdot,\cdot,\cdot)$ измеримы по Лебегу-Борелю (LB-измеримы) по (t,u) для любого $x \in G$, и непрерывны по x для почти всех $t \in [0,\infty)$ и всех $u \in U$.*

LB-измеримость функции $\phi : [0,\infty) \times U \to \mathbb{R}^n$ означает, что она измерима относительно σ-алгебры порожденной декартовым произведением лебеговской σ-алгебры в $[0,\infty)$ и борелевской σ-алгебры в $\mathbb{R}^m$.

Для любой LB-измеримой функции $\phi : [0,\infty) \times U \to \mathbb{R}^n$ ее суперпозиция $t \mapsto \phi(t,u(t))$ с измеримой по Лебегу функцией $u : [0,\infty) \to \mathbb{R}^m$ измерима по Лебегу.

Если $u(\cdot)$ — измеримая по Лебегу функция, то

$$\dot{x}(t) = \phi(t,x(t)) := f(t,x(t),u(t))$$

— дифференциальное уравнение с измеримой по t и непрерывной по x правой частью.

Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — некоторый процесс.

Условие $(A1)$ *Существуют такие непрерывная функция* $\gamma\colon [0,\infty) \mapsto (0,\infty)$ *и локально интегрируемая функция* $\nu\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}^1$, *что* $\{x\colon \|x - x_*(t)\| \le \gamma(t)\} \subset G$ *для всех* $t \ge 0$, *и для п.в.* $t \in [0,\infty)$ *выполняется неравенство*

$$\max_{\{x\colon \|x - x_*(t)\| \le \gamma(t)\}} \Big\{ \|f_x(t,x,u_*(t))\| + \|f_x^0(t,x,u_*(t))\| \Big\} \le \nu(t).$$

$(A1) \Rightarrow$ применимость стандартных результатов о существовании, единственности и непрерывной зависимости решения $x(\tau,\xi;\cdot)$ задачи Коши

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u_*(t)), \qquad x(\tau) = \xi.$$

от начальных данных (τ,ξ) и дифференцируемости по начальному состоянию ξ на любом конечном интервале $[0,T]$, $T > 0$.

[2] Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление, М: Наука. 1979 (см. § 2.5.).

“Стандартные” условия регулярности

Условие $(A0)'$. *Множество U — произвольное непустое. Функции $f(\cdot,\cdot,\cdot)$, $f^0(\cdot,\cdot,\cdot)$ определены на множестве $[0,\infty)\times G\times\overline{U}$. При почти всех $t\in[0,\infty)$ для всех $(x,u)\in G\times\overline{U}$ существуют производные $f_x(t,x,u)$ и $f_x^0(t,x,u)$. Функции $f(\cdot,x,u)$, $f^0(\cdot,x,u)$, $f_x(\cdot,x,u)$, и $f_x^0(\cdot,x,u)$ измеримы по Лебегу по t для любых $(x,u)\in G\times\overline{U}$ и непрерывны по (x,u) на $G\times\overline{U}$ для почти всех $t\in[0,\infty)$.*

Условие $(A1)'$ *Допустимые управления $u(\cdot)$, и функции $f_x(\cdot,\cdot,\cdot)$ и $f_x^0(\cdot,\cdot,\cdot)$ локально ограничены.*

В этом случае $u(\cdot)\in L^\infty_{loc}[0,\infty)$, а локальная ограниченность функции $\phi(\cdot,\cdot,\cdot)$ переменных t, x и u означает, что для любого $T>0$, любого компакта $D\subset G$ и для любого ограниченного множества $V\subset\overline{U}$ существует такое число M, что $\|\phi(t,x,u)\|\le M$ при почти всех $t\in[0,T]$ для всех $(x,u)\in D\times V$.

Задача (P_T) на конечном интервале $[0, T]$, $T > 0$

$$J_T(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^T f^0(t, x(t), u(t))\, dt \to \max,$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \qquad x(0) = x_0,$$

$$u(t) \in U.$$

Определим функцию Гамильтона-Понтрягина $\mathcal{H}(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ и функцию максимума (гамильтониан) $H(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ равенствами

$$\mathcal{H}(t, x, u, \psi^0, \psi) = \langle f(t, x, u), \psi \rangle + \psi^0 f^0(t, x, u),$$

$$H(t, x, \psi^0, \psi) = \sup_{u \in U} \mathcal{H}(t, x, u, \psi^0, \psi).$$

Здесь $t \geq 0$, $x \in G$, $u \in U$, $\psi^0 \in \mathbb{R}^1$, $\psi \in \mathbb{R}^n$.

В нормальном случае (при $\psi^0 = 1$) вместо $\mathcal{H}(t, x, u, 1, \psi)$ и $H(t, x, 1, \psi)$ будем писать $\mathcal{H}(t, x, u, \psi)$ и $H(t, x, \psi)$.

Теорема 1 (ПМП, 1956). *Пусть* $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ *— оптимальная пара в* (P_T). *Тогда существуют такие* $\psi^0 \geq 0$ *и* $\psi(\cdot) \in AC([0,T], R^n)$, *что*

(i) *функция* $\psi(\cdot)$ *является решением сопряженной системы*

$$\dot{\psi}(t) = -\mathcal{H}_x(t, x_*(t), u_*(t), \psi^0, \psi(t))$$
$$= -\left[f_x(t, x_*(t), u_*(t))\right]^* \psi(t) - \psi^0 f_x^0(t, x_*(t), u_*(t)),$$

(ii) *выполняется условие максимума:*

$$\mathcal{H}(t, x_*(t), u_*(t), \psi^0, \psi(t)) \overset{\text{п.в.}}{=} \sup_{u \in U} \mathcal{H}(t, x_*(t), u, \psi^0, \psi(t)),$$

(iii) *выполняются условия трансверсальности:*

$$\psi^0 > 0, \qquad \psi(T) = 0.$$

Условия (i) и (ii) будем называть основными соотношениями принципа максимума.

Задача (P_T):

$$J_T(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^T f^0(t, x(t), u(t))\, dt \to \max,$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \qquad x(0) = x_0, \qquad u(t) \in U.$$

Эквивалентная задача $(\widetilde{P}_T)$:

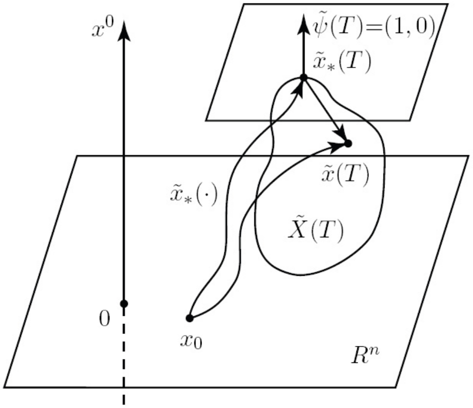
$$J_T(\tilde{x}(\cdot), u(\cdot)) = x^0(T) \to \max,$$

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{f}(t, x(t), u(t)), \qquad \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0, \quad u(t) \in U.$$

Здесь

$$\tilde{x} = (x^0, x) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \tilde{f}(t, x, u) = (f^0(t, x, u), f(t, x, u)),$$

$$\tilde{x}_0 = (0, x_0).$$



Условия трансверсальности в правом конце:

$$\psi^0 = 1, \qquad \psi(T) = 0.$$

Условия трансверсальности на бесконечности

Условия трансверсальности для задачи (P_T):

$$\psi^0 = 1, \qquad \psi(T) = 0.$$

"Стандартные" обобщения:

$$1) \quad \psi^0 = 1, \qquad \lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0,$$

$$2) \quad \psi^0 = 1, \qquad \lim_{t\to\infty} \langle x_*(t), \psi(t)\rangle = 0.$$

Теорема 2. *Пусть* $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — *конечно оптимальный процесс в* (P). *Тогда существуют такие* $\psi \geq 0$ *и* $\psi(\cdot) \in AC_{loc}[0, \infty)$, $\psi^0 + \|\psi(0))\| = 1$, *что*

(i) *функция* $\psi(\cdot)$ *является решением сопряженной системы*

$$\dot{\psi}(t) = -\mathcal{H}_x(t, x_*(t), u_*(t), \psi^0, \psi(t))$$
$$= -\left[f_x(t, x_*(t), u_*(t))\right]^* \psi(t) - \psi^0 f_x^0(t, x_*(t), u_*(t)),$$

(ii) *выполняется условие максимума:*

$$\mathcal{H}(t, x_*(t), u_*(t), \psi^0, \psi(t)) \overset{п.в.}{=} \sup_{u \in U} \mathcal{H}(t, x_*(t), u, \psi^0, \psi(t)).$$

[3] Halkin H. Necessary conditions for optimal control problems with infinite horizons. Econometrica, 1974, vol. 42, pp. 267-272.

[4] Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р.В. Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов, М.: Физматгиз, 1961 (см. главу 4).

Доказательство теоремы 2

Выберем последовательность $\{T_k\}_{k=1}^{\infty}$, $0 < T_1 < T_2 < \dots$, $\lim_{k\to\infty} T_k = \infty$, и рассмотрим последовательность задач $\{(Q_k)\}_{k=1}^{\infty}$ следующего вида:

$$J_k(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^{T_k} f^0(t, x(t), u(t))\, dt \to \max\,,$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \qquad x(0) = x_0, \qquad x(T_k) = x_*(T_k),$$

$$u(t) \in U.$$

Все данные задач (Q_k) те же самые, что и для задачи (P).

Конечная оптимальность процесса $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ в (P) означает его оптимальность в задаче (Q_k) для любого $k = 1, 2, \dots$.

Для любого $k = 1, 2, \ldots$ в силу принципа максимума Понтрягина существует такая пара сопряженных переменных $(\psi_k^0, \psi_k(\cdot))$, где $\psi_k^0 \geq 0$ и $\psi_k(\cdot) \in AC([0, T_k], \mathbb{R}^n)$, что на $[0, T_k]$ имеем

$$\dot{\psi}_k(t) \overset{\text{п.в.}}{=} -[f_x(t, x_*(t), u_*(t))]^* \psi_k(t) - \psi_k^0 f_x^0(t, x_*(t), u_*(t)),$$

$$\mathcal{H}(t, x_*(t), u_*(t), \psi_k^0, \psi_k(t)) \overset{\text{п.в.}}{=} \sup_{u \in U} \mathcal{H}(t, x_*(t), u, \psi_k^0, \psi_k(t)),$$

$$\psi_k^0 + \|\psi_k(0)\| > 0.$$

Не ограничивая общности можно считать, что

$$\psi_k^0 + \|\psi_k(0)\| = 1.$$

Для каждого $k = 1, 2, \ldots$ доопределим функцию $\psi_k(\cdot)$ на $[0, \infty)$, полагая $\psi_k(t) \equiv \psi_k(T_k)$, $t > T_k$.

Рассмотрим последовательности $\{\psi_k^0\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{\psi_k(0)\}_{k=1}^{\infty}$. В силу равенства $\psi_k^0 + \|\psi_k(0)\| = 1$ они ограничены. Следовательно, переходя к подпоследовательности, можно считать, что для некоторой постоянной $\psi^0 \geq 0$ и вектора $\psi_0 \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\psi_k^0 \to \psi^0, \quad \psi_k(0) \to \psi_0, \qquad \text{при} \quad k \to \infty, \qquad \psi^0 + \|\psi_0\| = 1.$$

Из сопряженной системы получаем для $t \in [0, T_1]$ равенство

$$\psi_k(t) = \psi_k(0) - \int_0^t \left\{ [f_x(s, x_*(s), u_*(s))]^* \, \psi_k(s) + \psi_k^0 f_x^0(s, x_*(s), u_*(s)) \right\} \, ds.$$

Следовательно,

$$\|\psi_k(t)\| \leq \|\psi_k(0)\| + \int_0^t \|f_x^0(s, x_*(s), u_*(s))\| \, ds$$

$$+ \int_0^t \left\| [f_x(s, x_*(s), u_*(s))]^* \right\| \, \|\psi_k(s)\| \, ds$$

В силу $(A1)$ и леммы Гронуолла-Беллмана получаем равномерную ограниченность последовательности $\{\psi_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ на $[0, T_1]$:

$$\|\psi_k(t)\| \leq C_1 = \left[1 + \int_0^{T_1} \nu(s) \, ds \right] e^{\int_0^{T_1} \nu(s) \, ds}, \qquad t \in [0, T_1].$$

Поскольку

$$\dot\psi_k(t) \overset{\text{п.в.}}{=} -\left[f_x(t,x_*(t),u_*(t))\right]^* \psi_k(t) - \psi_k^0 f_x^0(t,x_*(t),u_*(t)),$$

то $\{\psi_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ равностепенно непрерывна на $[0,T_1]$. Действительно, пусть функция $m(\cdot)$ выражается равенством

$$m(t)=\int_0^t \nu(s)\,ds, \qquad t\in[0,T_1].$$

Для каждого $k=1,2,\ldots$ и любого интервала $[\alpha,\beta]\subset[0,T_1]$ имеем

$$\|\psi_k(\beta)-\psi_k(\alpha)\| \le \int_\alpha^\beta \left\| \left[f_x(t,x_*(t),u_*(t))\right]^* \psi_k(t)-\psi_k^0 f_x^0(t,x_*(t),u_*(t))\right\| dt$$
$$\le (1+C_1)\int_\alpha^\beta \left\{\|\left[f_x(t,x_*(t),u_*(t))\right]^*\| + \|f_x^0(t,x_*(t),u_*(t))\|\right\} dt$$
$$\le (1+C_1)(m(\beta)-m(\alpha)).$$

Следовательно, $\{\psi_k(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ равностепенно непрерывна на $[0,T_1]$. В силу теоремы Арцела существует $\psi(\cdot)\in C([0,T_1],\mathbb{R}^n)$: после перехода к подпоследовательности $\lim_{k\to\infty}\|\psi_k(\cdot)=\psi(\cdot)\|_{C([0,T_1],\mathbb{R}^n)}$.

Из сопряженной системы получаем для $t \in [0, T_1]$ равенство

$$\psi_k(t) = \psi_k(0) - \int_0^t \left\{ [f_x(s, x_*(s), u_*(s))]^* \psi_k(s) + \psi_k^0 f_x^0(s, x_*(s), u_*(s)) \right\} ds.$$

Переходя к пределу получаем

$$\psi(t) = \psi_0 - \int_0^t \left\{ [f_x(s, x_*(s), u_*(s))]^* \psi(s) + \psi^0 f_x^0(s, x_*(s), u_*(s)) \right\} ds.$$

Следовательно, $\psi(\cdot) \in AC[0, T_1]$ и при п.в. $t \in [0, T_1]$ имеем

$$\dot\psi(t) \overset{\text{п.в.}}{=} -[f_x(t, x_*(t), u_*(t))]^* \psi(t) - \psi^0 f_x^0(t, x_*(t), u_*(t)).$$

Для п.в. $t \in [0, T_1]$ выполняется условие максимума

$$\mathcal{H}(t, x_*(t), u_*(t), \psi_k^0, \psi_k(t)) = \sup_{u \in U} \mathcal{H}(t, x_*(t), \psi_k^0, \psi_k(t)),$$

$$\mathcal{H}(t, x_*(t), u_*(t), \psi_k^0, \psi_k(t)) \geq \mathcal{H}(t, x_*(t), u, \psi_k^0, \psi_k(t)), \qquad u \in U.$$

Переходя при п.в. $t \in [0, T_1]$ к пределу при $k \to \infty$ получаем

$$\mathcal{H}(t, x_*(t), u_*(t), \psi^0, \psi(t)) \geq \mathcal{H}(t, x_*(t), u, \psi^0, \psi(t)), \qquad u \in U.$$

Повторяем эти рассуждения на $[0, T_2]$, $[0, T_3]$ и т.д. □

Пример 3 (P. Michel, 1982). Анормальный случай

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^{\infty} e^{-t}(2x(t) + u(t))\,dt \to \max\,,$$

$$\dot{x}(t) = (2x(t) + u(t))\,\phi(x(t)), \quad x(0) = 0, \quad G = (-\infty, \infty),$$

$$u(t) \in U = [-1, 0].$$

Здесь $\phi : \mathbb{R} \to [0, 1]$ – такая гладкая функция, что $\phi(x) \equiv 1$ если $|x| \leq 1$, и $\phi(x) \equiv 0$ если $|x| \geq 2$.

Пара $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$, где

$$x_*(t) \equiv 0, \quad u_*(t) \overset{\text{п.в.}}{=} 0, \qquad t \geq 0,$$

– единственная сильно оптимальная допустимая пара.

По теореме 2 пара $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$, вместе с сопряженными переменными $\psi^0 \geq 0$, $\psi(\cdot)$ удовлетворяет основным соотношениям принципа максимума.

С необходимостью выполняется равенство $\psi^0 = 0$.

$\mathcal{H}(t, x, u, \psi^0, \psi) = \psi(2x+u)\phi(x)+\psi^0 e^{-t}(2x+u) = \big(\psi\phi(x)+\psi^0 e^{-t}\big)(2x+u)$.

Функция $\psi(\cdot)$ – решение сопряженной системы

$$\dot{\psi}(t) = -2\big(\psi(t) + \psi^0 e^{-t}\big),$$

а условие максимума влечет неравенство

$$\psi(t) + \psi^0 e^{-t} \geq 0, \qquad t \geq 0.$$

Решая сопряженную систему получаем

$$\psi(t) = -2\psi^0 e^{-t} + (\psi(0) + 2\psi^0)e^{-2t}, \qquad t \geq 0.$$

Если $\psi^0 > 0$, то для всех достаточно больших $t > 0$ имеем

$$\psi(t) + \psi^0 e^{-t} = -\psi^0 e^{-t} + (\psi(0) + 2\psi^0)e^{-2t} < 0,$$

что противоречит условию максимума. Следовательно, $\psi^0 = 0$.

Рекомендованная литература

[5] Асеев С.М., Кряжимский А.В. Принцип максимума Понтрягина и задачи оптимального экономического роста. Труды МИАН, т. 257, 2007, стр. 3–271.

[6] Барро Р.Дж., Сала-и-Мартин Х. Экономический рост, М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010.

[7] Carlson D.A., Haurie A.B., Leizarowitz A. Infinite horizon optimal control. Deterministic and stochastic systems. Berlin: Springer, 1991.

[8] Clarke F. Functional analysis, calculus of variations and optimal control. Graduate Texts in Mathematics, vol. 264. London: Springer-Verlag, 2013.

Заданы непустое выпуклое открытое множество $G \subset \mathbb{R}^n$, непустое множество $U \subset \mathbb{R}^m$, функции

$$f : [0, \infty) \times G \times U \to \mathbb{R}^n, \qquad f^0 : [0, \infty) \times G \times U \to \mathbb{R}^1$$

и начальное состояние $x_0 \in G$.

Задача (P):

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^\infty f^0(t, x(t), u(t))\, dt \to \max,$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \qquad x(0) = x_0,$$

$$u(t) \in U.$$

Будем предполагать, что функции $f(\cdot, \cdot, \cdot)$, $f^0(\cdot, \cdot, \cdot)$, $f_x(\cdot, \cdot, \cdot)$ и $f^0_x(\cdot, \cdot, \cdot)$ непрерывны по совокупности переменных (t, x, u) на множестве $[0, \infty) \times G \times \overline{U}$, а допустимые управления локально ограничены, т.е. $u(\cdot) \in L^\infty_{loc}[0, \infty)$.

$\Rightarrow$ выполняются стандартные условия регулярности $(A0)'$ и $(A1)'$.

Функция стоимости и цена в экономике

Пусть $V(\tau,\zeta)$ есть **стоимость** (вектора) капитала $\zeta \in G$ в момент времени $\tau \geq 0$. Предположим, что для момента $\tau \geq 0$ и вектора $\zeta \in G$ существует частная производная (Фреше)

$$V_x(\tau,\zeta) = \left(\frac{\partial V(\tau,\zeta)}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial V(\tau,\zeta)}{\partial x^n}\right).$$

Цена вектора капитала ζ в момент τ есть приращение стоимости капитала при увеличении его величины на единицу ($n = 1$):

$$p(\tau,\zeta) = V(\tau,\zeta+1) - V(\tau,\zeta) \cong \frac{\partial}{\partial \zeta} V(\tau,\zeta) \cdot 1.$$

В гладком случае имеем ($n \geq 1$):

$$V(\tau,\zeta+\Delta\zeta) - V(\tau,\zeta) = \langle V_x(\tau,\zeta), \Delta\zeta \rangle + o(\|\Delta\zeta\|).$$

Вектор цен $p(\tau,\zeta)$ компонент вектора капитала $\zeta \in G$ в момент τ определяется равенством

$$p(\tau,\zeta) = \left(\frac{\partial V(\tau,\zeta)}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial V(\tau,\zeta)}{\partial x^n}\right).$$

Рассмотрим семейство задач $\{(P(\tau,\zeta))\}$, $\tau \geq 0$, $\zeta \in G$:

$$J_\tau(x(\cdot),u(\cdot)) = \int_\tau^\infty f^0(t,x(t),u(t))\,dt \to \max\,,$$

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)), \quad x(\tau) = \zeta,$$

$$u(t) \in U.$$

Предположим, что для любых $\tau \geq 0$ и $\zeta \in G$ в задаче $(P(\tau,\zeta))$ существует сильно оптимальная пара $(x_*(\cdot),u_*(\cdot))$.

Тогда **функция оптимального значения** $V(\cdot,\cdot)$ переменных $\tau \in [0,\infty)$ и $\zeta \in G$ определяется равенством

$$V(\tau,\zeta) = \max_{(x(\cdot),u(\cdot))} J_\tau(x(\cdot),u(\cdot)).$$

Максимум берется по всем допустимым в $(P(\tau,\zeta))$ парам $(x(\cdot),u(\cdot))$.

Отождествим величину $V(\tau,\zeta)$ (максимальная полезность вектора капитала $\zeta \in G$ в момент времени $\tau \geq 0$) со **стоимостью** капитала ζ в момент τ.

Рациональное поведение определяется стремлением к увеличению полезности или удовольствия (H.H. Gossen, 1854).

Пусть для момента $\tau \geq 0$ и вектора $\zeta \in G$ существует частная производная $V_x(\tau,\zeta)$.

Переходная (marginal) или **невидимая (shadow)** цена компоненты ζ^i вектора капитала $\zeta = (\zeta^1, \ldots, \zeta^n)$ в момент τ есть величина $\frac{\partial}{\partial \zeta^i} V(\tau,\zeta)$.

Тогда вектор невидимых (переходных) цен вектора капитала $\zeta \in G$ в момент τ определяется равенством

$$p(\tau,\zeta) = V_x(\tau,\zeta) = \left(\frac{\partial V(\tau,\zeta)}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial V(\tau,\zeta)}{\partial x^n} \right).$$

Теорема 3. *Предположим, что* $V(\cdot,\cdot) \in C^1([0,\infty) \times G, \mathbb{R}^1)$*. Пусть, кроме того, на множестве* $[0,\infty) \times G$ *существуют и непрерывны ее вторые производные* $V_{tx}(\cdot,\cdot)$, $V_{xt}(\cdot,\cdot)$, $V_{xx}(\cdot,\cdot)$*. Пусть допустимая пара* $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ *сильно оптимальна в задаче* (P)*. Тогда пара* $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ *вместе с функцией* $\psi(\cdot)$*, определяемой равенством*

$$\psi(t) = V_x(t, x_*(t)), \qquad t \geq 0,$$

удовлетворяет следующим условиям:

(i) *функция* $\psi(\cdot)$ *– решение сопряженной системы*

$$\begin{aligned}\dot{\psi}(t) &= -\mathcal{H}_x(t, x_*(t), u_*(t), \psi(t)) \\ &= -\left[f_x(t, x_*(t), u_*(t))\right]^* \psi(t) - f_x^0(t, x_*(t), u_*(t)),\end{aligned}$$

(ii) *выполняется условие максимума*

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(t, x_*(t), u_*(t), \psi(t)) &\overset{\text{п.в.}}{=} H(t, x_*(t), \psi(t)) \\ &= \sup_{u \in U} \mathcal{H}(t, x_*(t), u, \psi(t)) = -V_t(t, x_*(t)).\end{aligned}$$

Доказательство теоремы 3

Рассмотрим движение вдоль траектории $x_*(\cdot)$.

В момент времени $t \geq 0$ система находится в состоянии $x_*(t)$.

На малом интервале времени $[t, t + \Delta t]$, $\Delta t > 0$, система перейдет в состояние $x_*(t + \Delta t)$.

Имеем

$$V(t + \Delta t, x_*(t + \Delta t)) - V(t, x_*(t)) = \int_{t+\Delta t}^{\infty} f^0(s, x_*(s), u_*(s))\, ds$$

$$- \int_t^{\infty} f^0(s, x_*(s), u_*(s))\, ds = - \int_t^{t+\Delta t} f^0(s, x_*(s), u_*(s))\, ds.$$

Разделив последнее равенство на $\Delta t > 0$ и устремив Δt к нулю, получаем, что при п.в. $t \geq 0$ справедливо равенство

$$\langle V_x(t, x_*(t)), f(t, x_*(t), u_*(t)) \rangle + V_t(t, x_*(t)) + f^0(t, x_*(t), u_*(t)) = 0.$$

Пусть $x \in G$ и $u \in U$ — произвольные.

В силу непрерывности функций $f(\cdot, x, u)$ и $f^0(\cdot, x, u)$ для любого $t \geq 0$ имеем

$$\int_t^{t+\Delta t} f(s, x, u)\, ds = \Delta t f(t, x, u) + o(\Delta t),$$

$$\int_t^{t+\Delta t} f^0(s, x, u)\, ds = \Delta t f^0(t, x, u) + o(\Delta t).$$

Определим допустимую пару $(\tilde{x}(\cdot), \tilde{u}(\cdot))$ в $(P(t, x))$.

На малом интервале $[t, t + \Delta t]$, $\Delta t > 0$, определим траекторию $\tilde{x}(\cdot)$, как траекторию выходящую из точки x при постоянном управлении $\tilde{u}(s) \equiv u$, $s \in [t, t + \Delta t]$.

При таком движении вектор капитала $x(t) = x$ перейдет на интервале времени $[t, t + \Delta t]$ в положение

$$\tilde{x}(t + \Delta t) = x + \Delta t f(t, x, u) + o(\Delta t).$$

Далее из точки $\tilde{x}(t+\Delta t)$ на бесконечном полуинтервале $[t+\Delta t, \infty)$ движение системы осуществляется оптимальным образом. Тогда

$$J_t(\tilde{x}(\cdot), \tilde{u}(\cdot)) = \int_t^{t+\Delta t} f^0(s, \tilde{x}(s), u)\, ds + V(t+\Delta t, \tilde{x}(t+\Delta t)).$$

Т.к. пара $(\tilde{x}(\cdot), \tilde{u}(\cdot))$ не обязательно оптимальна в задаче $(P(t,x))$, то $J_t(\tilde{x}(\cdot), \tilde{u}(\cdot)) \leq V(t,x)$ и, следовательно, имеет место неравенство

$$V(t+\Delta t, \tilde{x}(t+\Delta t)) - V(t,x) + \int_t^{t+\Delta t} f^0(s, \tilde{x}(s), u)\, ds \leq 0.$$

Разделив последнее неравенство на $\Delta t > 0$ и устремив Δt к нулю, в силу непрерывной дифференцируемости функции $V(\cdot,\cdot)$ получаем

$$\langle V_x(t,x), f(t,x,u)\rangle + V_t(t,x) + f^0(t,x,u) \leq 0.$$

Это верно для любых $t \geq 0$, $x \in G$ и $u \in U$.

Пусть $t \geq 0$ таково, что в момент t времени выполняется равенство

$$\langle V_x(t, x_*(t)), f(t, x_*(t), u_*(t)) \rangle + V_t(t, x_*(t)) + f^0(t, x_*(t), u_*(t)) = 0.$$

Поскольку для любого $x \in G$ выполняется неравенство

$$\langle V_x(t, x), f(t, x, u_*(t)) \rangle + V_t(t, x) + f^0(t, x, u_*(t)) \leq 0.$$

то функция $\phi : G \to \mathbb{R}^1$, определенная равенством

$$\phi(x) = \langle V_x(t, x), f(t, x, u_*(t)) \rangle + V_t(t, x) + f^0(t, x, u_*(t)), \quad x \in G,$$

достигает своего максимального значения в точке $x_*(t) \in G$. Следовательно, $\phi_x(x_*(t)) = 0$, т.е.

$$\phi_x(x_*(t)) = V_{xx}(t, x_*(t)) f(t, x_*(t), u_*(t)) + [f_x(x_*(t), u_*(t))]^* V_x(x_*(t)) \\ + V_{tx}(t, x_*(t)) + f^0_x(t, x_*(t), u_*(t)) \overset{\text{п.в.}}{=} 0.$$

Далее для любого $u \in U$ и любого $t \geq 0$ выполняется неравенство

$$\langle V_x(x_*(t)), f(t, x_*(t), u), \rangle + V_t(t, x_*(t)) + f^0(t, x_*(t), u) \leq 0,$$

а в силу равенства

$$\langle V_x(t, x_*(t)), f(t, x_*(t), u_*(t))\rangle + V_t(t, x_*(t)) + f^0(t, x_*(t), u_*(t)) = 0.$$

при п.в. $t \geq 0$ при $u = u_*(t)$ последнее неравенство обращается в равенство.
Следовательно,

$$\begin{aligned} &\langle V_x(t, x_*(t)), f(t, x_*(t), u_*(t))\rangle + f^0(t, x_*(t), u_*(t)) \\ &\quad \overset{\text{п.в.}}{=} \max_{u \in U} \left\{\langle V_x(t, x_*(t)), f(t, x_*(t), u)\rangle + f^0(t, x_*(t), u)\right\} \\ &\qquad = -V_t(t, x_*(t)). \end{aligned}$$

Уравнение Беллмана:

$$V_t(t, x) + \max_{u \in U} \left\{\langle V_x(t, x), f(t, x, u)\rangle + f^0(t, x, u)\right\} = 0, \quad x \in G, \; t \geq 0.$$

Определим векторную функцию $\psi : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$ равенством

$$\psi(t) = V_x(t, x_*(t)), \qquad t \in [0, \infty).$$

Тогда функция $\psi(\cdot)$ локально абсолютно непрерывна.
При п.в. $t \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned}\dot{\psi}(t) = V_{xx}(t, x_*(t)) f(t, x_*(t), u_*(t)) + V_{xt}(t, x_*(t))\\ = V_{xx}(t, x_*(t)) f(t, x_*(t), u_*(t)) + V_{tx}(t, x_*(t)).\end{aligned}$$

Следовательно, $\psi(\cdot)$ является решением сопряженной системы:

$$\dot{\psi}(t) \overset{\text{п.в.}}{=} -\left[f_x(x_*(t), u_*(t))\right]^* \psi(t) - f_x^0(t, x_*(t), u_*(t)).$$

Выполняется условие максимума:

$$\begin{aligned}&\langle \psi(t), f(t, x_*(t), u_*(t)) \rangle + f^0(t, x_*(t), u_*(t))\\ &\overset{\text{п.в.}}{=} \max_{u \in U} \left\{ \langle \psi(t), f(t, x_*(t), u) \rangle + f^0(t, x_*(t), u) \right\}\\ &= -V_t(t, x_*(t)).\end{aligned}$$

$\square$

Условие максимума. Оптимальная инвестиционная политика $u_*(\cdot)$ максимизирует приращение совокупной полезности:

$$\langle \psi(t), f(t, x_*(t), u_*(t)) \rangle + f^0(t, x_*(t), u_*(t)) \stackrel{\text{п.в.}}{=} \max_{u \in U} \left\{ \langle \psi(t), f(t, x_*(t), u) \rangle + f^0(t, x_*(t), u) \right\}.$$

Сопряженная система. Выполняется балансовое соотношение:

$$\dot{\psi}(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} -\left[f_x(x_*(t), u_*(t))\right]^* \psi(t) - f_x^0(t, x_*(t), u_*(t)).$$

При $n = 1$ имеем

$$\psi(t+1) - \psi(t) \cong -\left[f(x_*(t)+1, u_*(t)) - f(x_*(t), u_*(t))\right] \psi(t) - \left[f^0(t, x_*(t)+1, u_*(t)) - f^0(t, x_*(t), u_*(t))\right].$$

“Стандартные” условия трансверсальности на бесконечности.

1) Невидимая цена капитала в оптимальном режиме исчерпывается на бесконечности:

$$\psi(t) \to 0 \qquad \text{при} \qquad t \to \infty.$$

2) Полная стоимость капитала, подсчитанная в невидимых ценах, в оптимальном режиме исчерпывается на бесконечности:

$$\langle \psi(t), x_*(t) \rangle \to 0 \quad \text{при} \qquad t \to \infty.$$

Условие
$$\langle\psi(t), x_*(t)\rangle \to 0 \qquad \text{при} \qquad t \to \infty.$$
означает невозможность “экономических пузырей” на бесконечности. Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — сильно оптимальная пара, $\lim_{i\to\infty} \tau_i = \infty$ и
$$\langle\psi(\tau_i), x_*(\tau_i)\rangle \geq A > 0.$$
Тогда в каждый момент времени τ_i имеем
$$J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) = \int_0^{\tau_i} f^0(t, x_*(t), u_*(t))\,dt + \int_{\tau_i}^{\infty} f^0(t, x_*(t), u_*(t))\,dt.$$
Существует такое N, что при всех $i \geq N$ выполняется неравенство
$$\left|\int_{\tau_i}^{\infty} f^0(t, x_*(t), u_*(t))\,dt\right| < A.$$
Продажа в момент τ_i капитала $x_*(\tau_i)$ по цене $\psi(\tau_i)$ даст прибыль
$$\int_0^{\tau_i} f^0(t, x_*(t), u_*(t))\,dt + \langle\psi(\tau_i), x_*(\tau_i)\rangle > J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)).$$
Это означает “переоцененность” капитала $x_*(\tau_i)$ в моменты τ_i, $i \geq N$.

Пример 4. Недифференцируемость функции оптимального значения

Задача $(P(\tau,\zeta))$, $\tau \in [0,\infty)$, $\zeta \in G = \mathbb{R}^1$:

$$J_\tau(x,u) = \int_\tau^\infty e^{-2t} x(t)\, dt \to \max\,,$$

$$\dot{x}(t) = u(t)x(t), \qquad x(\tau) = \zeta,$$

$$u(t) \in U = [-1,1].$$

Решение:

$$x_*(\tau,\zeta;t) = \begin{cases} \zeta e^{t-\tau}, & \text{если} \quad \zeta > 0, \\ 0, & \text{если} \quad \zeta = 0, \\ \zeta e^{-(t-\tau)}, & \text{если} \quad \zeta < 0, \end{cases}$$

$$V(\tau,\zeta) = \begin{cases} \zeta e^{-\tau}, & \text{если} \quad \zeta > 0, \\ 0, & \text{если} \quad \zeta = 0, \\ \frac{\zeta}{3} e^{-2\tau}, & \text{если} \quad \zeta < 0. \end{cases}$$

В задаче $(P) = (P(0,0))$ решение $x_*(t) \equiv 0$, $t \geq 0$.

Производной $V_\zeta(t,0)$ не существует ни при каком $t \geq 0$.

Формула Коши для линейных систем

Пусть $A(\cdot)$ — $n \times n$ матричная функция с измеримыми компонентами и $\|A(t)\| \leq \kappa(t)$, $\kappa(\cdot) \in L^1_{loc}[0,\infty)$, и $\phi(\cdot) \in L^1_{loc}[0,\infty)$.

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t) + \phi(t), \quad y(\tau) = \xi,$$

$$\Rightarrow \qquad y(t) = K(t,\tau)\xi + \int_\tau^t K(t,s)\phi(s)\,ds, \quad t \in [0,\infty).$$

Здесь $K(\cdot,\cdot)$ — $n \times n$ матричная функция, $K(t,\tau) = Y(t)\,[Y(\tau)]^{-1}$, $t \geq 0$, $\tau \geq 0$, и $Y(\cdot)$ — фундаментальная матрица системы

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t).$$

Для определенности положим $Y(0) = I$.

Формулу Коши можно записать в виде

$$y(t) = Y(t)Y^{-1}(\tau)\xi + Y(t)\int_\tau^t [Y(s)]^{-1}\,\phi(s)\,ds, \quad t \in [0,\infty).$$

Пусть задана линейная система

$$\dot{y}(t) = A(t)y(t).$$

Сопряженная к ней система:

$$\dot{z}(t) = -A^*(t)z(t).$$

Пусть $Z(\cdot)$ — ее фундаментальная матрица. Положим $Z(0) = I$.

Для любого решения $y(\cdot)$ системы $\dot{y}(t) = A(t)y(t)$ и любого решения $z(\cdot)$ сопряженной к ней системы $\dot{z}(t) = -A^*(t)z(t)$ имеем

$$\frac{d}{dt}\langle y(t), z(t)\rangle \overset{\text{п.в.}}{=} \langle A(t)y(t), z(t)\rangle - \langle y(t), A^*(t)z(t)\rangle = 0.$$

Откуда вытекает

$$Y^*(t)Z(t) \equiv I, \qquad t \geq 0 \quad \Rightarrow \quad Y^*(t) = [Z(t)]^{-1}, \qquad t \geq 0.$$

$$J_T(x(\cdot),u(\cdot)) = \int_0^T f^0(t,x(t),u(t))\,dt \to \max,$$

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)), \qquad x(0)=x_0, \qquad u(t)\in U.$$

Пусть $(x_*(\cdot),u_*(\cdot))$ — оптимальная пара. В силу ПМП существуют такие $\psi^0 \geq 0$ и $\psi(\cdot) \in AC\,([0,T],R^n)$, что

(i) функция $\psi(\cdot)$ является решением сопряженной системы

$$\dot{\psi}(t) = -\left[f_x(t,x_*(t),u_*(t))\right]^* \psi(t) - \psi^0 f_x^0(t,x_*(t),u_*(t)),$$

(ii) выполняется условие максимума:

$$\mathcal{H}(t,x_*(t),u_*(t),\psi^0,\psi(t)) \overset{\text{п.в.}}{=} \sup_{u\in U} \mathcal{H}(t,x_*(t),u,\psi^0,\psi(t)),$$

(iii) выполняются условия трансверсальности: $\psi^0>0$, $\psi(T)=0$.

Можно считать, что $\psi^0=1$. В силу формулы Коши имеем

$$\psi(t) = Z_*(t)\psi(T) - Z_*(t)\int_T^t [Z_*(s)]^{-1} f_x^0(s,x_*(s),u_*(s))\,ds$$
$$= Z_*(t)\int_t^T [Z_*(s)]^{-1} f_x^0(s,x_*(s),u_*(s))\,ds, \qquad t\geq 0.$$

Условие

$$\psi(t) = Z_*(t) \int_t^T [Z_*(s)]^{-1} f_x^0(s, x_*(s), u_*(s))\, ds, \qquad t \geq 0,$$

дает основание для представления сопряженной переменной при помощи аналога формулы Коши

$$\psi(t) = Z_*(t) \int_t^\infty [Z_*(s)]^{-1} f_x^0(s, x_*(s), u_*(s))\, ds, \qquad t \geq 0. \qquad \bigstar$$

В этом случае функция $\psi(\cdot)$ автоматически удовлетворяет на интервале $[0, \infty)$ сопряженной системе

$$\dot{\psi}(t) = -\left[f_x(t, x_*(t), u_*(t))\right]^* \psi(t) - \psi^0 f_x^0(t, x_*(t), u_*(t)).$$

Из условия $\bigstar$ могут следовать "стандартные" условия трансверсальности (но не обязательно)

$$1) \quad \psi^0 > 0, \qquad \lim_{t \to \infty} \psi(t) = 0,$$

$$2) \quad \psi^0 > 0, \qquad \lim_{t \to \infty} \langle x_*(t), \psi(t) \rangle = 0.$$

Пример 4

$$J(x,u) = \int_0^\infty e^{-t} \ln \frac{1}{x(t) - 1/2}\, dt \to \max ,$$

$$\dot{x}(t) = u(t) - x(t), \qquad u(t) \in U = [1/2, 1],$$

$$x(0) = 1.$$

Положим $G = (1/2, \infty)$. Единственный сильно оптимальный процесс:

$$x_*(t) = \frac{1 + e^{-t}}{2}, \quad u_*(t) \overset{\text{п.в.}}{=} \frac{1}{2}.$$

Пусть $\psi^0 \geq 0$, $\psi^0(\cdot)$ — соответствующие сопряженные переменные.

$$\mathcal{H}(x, t, u, \psi, \psi^0) = \psi(u - x) - \psi^0 e^{-t} \ln(x - 1/2).$$

Сопряженная система и условие максимума:

$$\dot{\psi}(t) = \psi(t) + 2\psi^0, \qquad \psi(t) \leq 0 \quad \text{при} \quad t \geq 0.$$

Решая сопряженную систему получаем

$$\psi(t) = (\psi(0) + 2\psi^0)e^t - 2\psi^0 \quad \text{при} \quad t \geq 0.$$

1) $\psi^0 = 0$. Тогда

$$\psi(t) = (\psi(0) + 2\psi^0)e^t - 2\psi^0 = \psi(0)e^t \quad \Rightarrow \quad \psi(0) < 0.$$

Имеем $\psi(t) \to -\infty$ и $x_*(t)\psi(t) = \frac{1+e^{-t}}{2}\psi(t) \to -\infty$ при $t \to \infty$.

2) $\psi^0 = 1$. Тогда

$$\psi(t) = (\psi(0) + 2\psi^0)e^t - 2\psi^0 = (\psi(0) + 2)e^t - 2 \quad \Rightarrow \quad \psi(0) \le -2.$$

2.1) $\psi(0) = -2$, тогда $\psi(t) \equiv -2$, $t \ge 0$, $\lim_{t\to\infty} x_*(t)\psi(t) = -1$.

2.2) $\psi(0) < -2$, тогда $\lim_{t\to\infty} \psi(t) = -\infty$, $\lim_{t\to\infty} x_*(t)\psi(t) = -\infty$.

Оба варианта стандартных условий трансверсальности нарушаются.

Здесь $\dot z(t) = z(t) \Rightarrow Z_*(t) = e^t I$, $t \ge 0$, и

$$f_x^0(t, x_*(t), u_*(t)) = -\frac{e^{-t}}{x_*(t) - 1/2} = -\frac{e^{-t}}{\frac{1+e^{-t}}{2} - \frac{1}{2}} \equiv -2.$$

Для $\psi^0 = 1$, $\psi(t) \equiv -2$ (случай 2.1)) справедливо тождество $\bigstar$:

$$\psi(t) = Z_*(t)\int_t^\infty [Z_*(s)]^{-1} f_x^0(s, x_*(s), u_*(s))\, ds$$

$$= e^t \int_t^\infty (-2)e^{-s}\, ds \equiv -2, \qquad t \ge 0.$$

Условие роста

Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — некоторый процесс.

(A2) *Существуют такие число $\beta > 0$ и интегрируемая функция $\lambda : [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}^1$, что для любого $\zeta \in G$, $\|\zeta - x_*(0)\| < \beta$ решение $x(\zeta;\cdot)$ задачи Коши $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u_*(t))$, $x(0) = \zeta$, существует в G на $[0,\infty)$ и*

$$\max_{\theta\in[x(\zeta;t),x_*(t)]} \left|\langle f_x^0(t,\theta,u_*(t)), x(\zeta;t) - x_*(t)\rangle\right| \overset{\text{п.в.}}{\leq} \|\zeta - x_*(0)\|\lambda(t).$$

Лемма 1. *Пусть процесс $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ удовлетворяет условиям $(A1)$ и $(A2)$. Тогда*

$$\left\| [Z_*(t)]^{-1} f_x^0(t, x_*(t), u_*(t)) \right\| \leq \sqrt{n}\lambda(t) \quad \text{при п.в.} \quad t \geq 0.$$

Здесь $Z_*(\cdot)$ — матричное решение линейной системы

$$\dot{z}(t) = -\left[f_x(t, x_*(t), u_*(t))\right]^* z(t)$$

с начальным условием $Z_*(0) = I$.

Доказательство леммы 1

Пусть $\zeta_i \in \mathbb{R}^n$ — вектор с компонентами $\zeta_i^j = \delta_{i,j}$, $i, j = 1, \ldots n$.
В силу $(A2)$ для любого $\alpha \in (0, \beta)$ траектория $x(x_0 + \alpha\zeta_i; \cdot)$, соответствующая $u(\cdot) = u_*(\cdot)$ и $x(0) = x_0 + \alpha\zeta_i$, определена на $[0, \infty)$ и

$$\left|\langle f_x^0(t, x_*(t), u_*(t)),\, x(x_0 + \alpha\zeta_i; t) - x_*(t)\rangle\right| \overset{\text{п.в.}}{\le} \alpha\lambda(t).$$

В силу теоремы о дифференцируемости решения задачи Коши по начальному состоянию

$$x(x_0 + \alpha\zeta_i; t) = x_*(t) + \alpha\xi_i(t) + o_i(\alpha, t), \quad i = 1, \ldots, n, \quad t \ge 0.$$

Здесь вектора $\xi_i(\cdot)$, $i = 1, \ldots, n$ — столбцы $Y_*(\cdot)$ и для любого $i = 1, \ldots, n$ имеем $\|o_i(\alpha, t)\|/\alpha \to 0$ при $\alpha \to 0$, равномерно по t на любом конечном интервале $[0, T]$, $T > 0$. Следовательно,

$$\left|\langle f_x^0(t, x_*(t), u_*(t)), \xi_i(t) + \frac{o_i(\alpha, t)}{\alpha}\rangle\right| \overset{\text{п.в.}}{\le} \lambda(t), \quad i = 1, \ldots, n, \quad t \ge 0.$$

Переходя к пределу при $\alpha \to 0$ для п.в. $t \ge 0$ получаем

$$\left|\langle f_x^0(t, x_*(t), u_*(t)), \xi_i(t)\rangle\right| \overset{\text{п.в.}}{\le} \lambda(t), \quad i = 1, \ldots, n, \quad t \ge 0.$$

Следовательно, $\left\|\,[Y_*(t)]^*\, f_x^0(t, x_*(t), u_*(t))\right\| \overset{\text{п.в.}}{\le} \sqrt{n}\lambda(t)$. $\square$

Усиленное условие роста

Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — некоторый процесс.

$(A2')$ *Существуют такие число $\beta > 0$ и интегрируемая функция $\lambda : [0,\infty) \mapsto \mathbb{R}^1$, что для любого $\zeta \in G$, $\|\zeta - x_*(0)\| < \beta$ решение $x(\zeta;\cdot)$ задачи Коши $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u_*(t))$, $x(0) = \zeta$, существует в G на $[0,\infty)$ и для любых $\|\zeta_i - x_*(0)\| < \beta$, $i = 1, 2$, имеем*

$$\max_{\theta\in[x(\zeta_1;t),x(\zeta_2;t)]} \left| \langle f_x^0(t,\theta,u_*(t)), x(\zeta_1;t) - x(\zeta_2;t)\rangle \right| \overset{\text{п.в.}}{\leq} \|\zeta_1 - \zeta_2\|\lambda(t).$$

Пусть $\forall\ (x(\zeta;\cdot), u_*(\cdot))$: $\|\zeta - x_*(0)\| < \beta$ выполняется условие $(A1)$.

Определим множество $\Omega \subset [0,\infty) \times \mathbb{R}^n$ равенством

$$\Omega = \bigcup_{\zeta:\ \|\zeta - x_*(0)\| < \beta} \{(\tau,\xi) \in \mathbb{R}^{n+1} : \xi = x(\zeta;\tau):\ \tau \geq 0\}.$$

$\zeta \mapsto x(\zeta;\tau)$ — гомеоморфизм $\Rightarrow$ множество Ω — открытое.

Лемма 2. *Пусть для процесса* $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ *выполняется условие* $(A2')$ *и для любого процесса* $(x(\zeta;\cdot), u_*(\cdot))$, $\|x(\zeta;0) - x_*(0)\| < \beta$, *выполняется условие* $(A1)$. *Тогда для любой точки* $(\tau, \xi) \in \Omega$ *имеем*

$$\left\| [Z(\tau,\xi;t)]^{-1} f_x^0(t, x(\tau,\xi;t), u_*(t)) \right\| \leq \sqrt{n}\lambda(t) \quad \textit{при п.в.} \quad t \geq 0.$$

Здесь $x(\tau,\xi;\cdot)$ — решение задачи Коши

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u_*(t)), \qquad x(\tau) = \xi,$$

а $Z(\tau,\xi;\cdot)$ — матричное решение линейной системы

$$\dot{z}(t) = -\left[f_x(t, x(\tau,\xi;t), u_*(t))\right]^* z(t),$$

удовлетворяющее начальному условию $Z(\tau,\xi;0) = I$.

Доказательство леммы 2 следует из леммы 1.

Функция межвременной полезности

Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — некоторый процесс и выполняется $(A2')$.

Пусть $\forall\ (x(\zeta;\cdot), u_*(\cdot))$: $\|\zeta - x_*(0)\| < \beta$ выполняется условие $(A1)$.

Пусть $0 \le \tau < s$ и $(\tau, \xi) \in \Omega$.

Определим **функцию межвременной полезности** $\pi(\tau, \cdot, s)$ на множестве

$$G_\tau = \{x \in G\colon\ (\tau, x) \in \Omega\}$$

равенством

$$\pi(\tau, \xi, s) = f^0(s, x(\tau, \xi; s), u_*(s)), \qquad \xi \in G_\tau.$$

Отображение $\xi \mapsto \pi(\tau, \xi, s)$ ставит в соответствие заданному в момент τ вектору капитала $\xi \in G_\tau$ мгновенную полезность $\pi(\tau, \xi, s)$, генерируемая им в момент $s > \tau$ при управлении $u_*(\cdot)$ на $[\tau, s]$.

Лемма 3. *Пусть процесс* $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ *удовлетворяет* $(A2')$ *и значение* $J(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ *конечно. Тогда* $\forall\ (\tau, \xi) \in \Omega$ *интеграл*

$$W(\tau,\xi) = \int_\tau^\infty \pi(\tau,\xi,s)\, ds = \int_\tau^\infty f^0(s, x(\tau,\xi;s), u_*(s))\, ds.$$

сходится.

Доказательство. Для любого $T > 0$ выполняется равенство

$$\int_\tau^T \pi(\tau,\xi,s)\, ds = \int_\tau^T f^0(s, x_*(s), u_*(s))\, ds \\ + \int_\tau^T \left[f^0(s, x(\tau,\xi;s), u_*(s)) - f^0(s, x_*(s), u_*(s)) \right]\, ds.$$

В силу $(A2')$ для п.в. $s \geq 0$ имеем

$$\left| f^0(s, x(\tau,\xi;s), u_*(s)) - f^0(s, x_*(s), u_*(s)) \right| \leq \| x(\tau,\xi;0) - x_*(0) \| \lambda(s).$$

Следовательно, интеграл $\int_\tau^\infty \pi(\tau,\xi,s)\, ds$ сходится. $\square$

Функцию $(\tau,\xi) \mapsto W(\tau,\xi)$, $(\tau,\xi) \in \Omega$, будем называть **функцией условной стоимости**.

Лемма 4. *Пусть для процесса* $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ *выполняется* $(A2')$, *значение* $J(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ *конечно и для любого процесса* $(x(\zeta;\cdot), u_*(\cdot))$: $\|\zeta - x_*(0)\| < \beta$ *выполняется* $(A1)$. *Тогда для любого* $\tau \geq 0$ *функция* $\xi \mapsto W(\tau,\xi)$ *непрерывно дифференцируема на* G_τ *и*

$$W_\xi(\tau,\xi) = \int_\tau^\infty \pi_\xi(\tau,\xi,s)\,ds$$

$$= Z(\tau,\xi;\tau)\int_\tau^\infty [Z(\tau,\xi;s)]^{-1} f_x^0(s,x(\tau,\xi;s),u_*(s))\,ds.$$

Доказательство. В силу теоремы о дифференцируемости решения $x(\tau,\xi;\cdot)$ по начальному состоянию ξ при п.в. $s \geq 0$ имеем

$$\pi_\xi(\tau,\xi,s) = Z(\tau,\xi;\tau)[Z(\tau,\xi;s)]^{-1} f_x^0(s,x(\tau,\xi;s),u_*(s)).$$

Поскольку в силу леммы 2 выполняется неравенство

$$\left\| [Z(\tau,\xi;s)]^{-1} f_x^0(s,x(\tau,\xi;s),u_*(s)) \right\| \leq \sqrt{n}\lambda(s) \quad \text{при п.в.} \quad t \geq 0.$$

то утверждение леммы 4 следует из теоремы о дифференцируемости несобственного интеграла по параметру. □

Теорема 4. *Пусть* $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — *слабо обгоняющий процесс в* (P), *значение* $J(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ *конечно и выполняется условие* $(A2')$. *Пусть для всех* $\zeta \in \mathbb{R}^n$: $\|\zeta - x_*(0)\| < \beta$, *для* $(x(\zeta;\cdot), u_*(\cdot))$ *выполняется* $(A1)$. *Тогда функция* $\psi\colon\ [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$, *определенная равенством*

$$\psi(t) = W_x(t, x_*(t)) = Z_*(t)\int_t^{\infty} [Z_*(s)]^{-1} f_x^0(s, x_*(s), u_*(s))\, ds, \qquad t \geq 0,$$

локально абсолютно непрерывна и удовлетворяет основным соотношениям П.М.П. в нормальной форме, т.е.

(i) *функция* $\psi(\cdot)$ *является решением сопряженной системы*

$$\dot{\psi}(t) = -\mathcal{H}_x(t, x_*(t), u_*(t), \psi(t)),$$

(ii) *выполняется условие максимума:*

$$\mathcal{H}(t, x_*(t), u_*(t), \psi(t)) \overset{\text{п.в.}}{=} H(t, x_*(t), \psi(t)).$$

Здесь $Z_*(\cdot)$ — *матричное решение линейной системы*

$$\dot{z}(t) = -\left[f_x(t, x_*(t), u_*(t))\right]^* (t) z(t),$$

удовлетворяющее начальному условию $Z(0) = I$.

Доказательство теоремы 4.

Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — слабо обгоняющий процесс.

Пусть $0 < T_1 < T_2 < \dots$ и $\lim_{k\to\infty} T_k = \infty$. Существует такое $\varepsilon_k > 0$, что

$$\mathbb{B}_k = \{x \in \mathbb{R}^n\colon \ \|x - x_*(T_k)\| \leq \varepsilon_k\} \subset G_{T_k}.$$

Рассмотрим последовательность следующих задач оптимального управления на конечных фиксированных интервалах времени $[0, T_k]$.

Задача (P_k):

$$J_k(x(\cdot), u(\cdot)) = W(T_k, x(T_k))) + \int_0^{T_k} f^0(t, x(t), u(t))\, dt \to \max\,,$$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \qquad x(0) = x_0, \quad x(T_k) \in \mathbb{B}_k,$$

$$u(t) \in U.$$

В силу леммы 4 функция $W(T_k, \cdot)$ непрерывно дифференцируема на множестве

$$G_{T_k} = \{x \in G\colon \ (T_k, x) \in \Omega\}.$$

Для любого $k = 1, 2, \dots$ сужение процесса $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ на $[0, T_k]$ является оптимальной парой в задаче (P_k).

Предположим противное. Тогда существуют такие k и допустимая пара $(x_k(\cdot), u_k(\cdot))$ в (P_k), что $J_k(x_k(\cdot), u_k(\cdot)) > J_k(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$.

Определим управление $u_*^k(\cdot)$ равенством

$$u_*^k(t) = \begin{cases} u_k(t), & t \in [0, T_k], \\ u_*(t), & t \in (T_k, \infty). \end{cases}$$

Пусть $x_*^k(\cdot)$ — соответствующая траектория. Поскольку $x_*^k(T_k) = x_k(T_k) \in G_{T_k}$, то траектория $x_*^k(\cdot)$ определена в G на $[0, \infty)$ и $(x_*^k(\cdot), u_*^k(\cdot))$ — допустимый процесс в (P). Тогда

$$\begin{aligned} J(x_*^k(\cdot), u_*^k(\cdot)) &= W(T_k, x_k(T_k)) + \int_0^{T_k} f^0(t, x_k(t), u_k(t))\, dt \\ &= J_k(x_k(\cdot), u_k(\cdot)) > J_k(x_*(\cdot), u_*(\cdot)) \\ &= W(T_k, x_*(T_k)) + \int_0^{T_k} f^0(t, x_*(t), u_*(t))\, dt = J(x_*(\cdot), u_*(\cdot)). \end{aligned}$$

Однако это противоречит слабо-обгоняющей оптимальности процесса $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ в (P).

В силу ПМП существует такая ненулевая пара сопряженных переменных $(\psi_k^0, \psi_k(\cdot))$, что $\psi_k^0 \geq 0$, $\psi_k(\cdot) \in AC\left([0, T_k], \mathbb{R}^n\right)$ и

$$\dot{\psi}_k(t) \overset{\text{п.в.}}{=} -\left[f_x(t, x_*(t), u_*(t))\right]^* \psi_k(t) - \psi_k^0 f_x^0(t, x_*(t), u_*(t)),$$

$$\mathcal{H}(t, x_*(t), u_*(t), \psi_k^0, \psi_k(t)) \overset{\text{п.в.}}{=} H(t, x_*(t), \psi_k^0, \psi_k(t)),$$

$$\psi_k(T_k) \in \psi_k^0 W_x(T_k, x_*(T_k)) - N_{\mathbb{B}_k}(x_*(T_k)).$$

Поскольку $x_*(T_k) \in \operatorname{int} \mathbb{B}_k$, то $N_{\mathbb{B}_k}(x_*(T_k)) = \{0\}$.

Следовательно,

$$\psi_k(T_k) = \psi_k^0 W_x(T_k, x_*(T_k)) \quad \Rightarrow \quad \psi_k^0 > 0.$$

Не ограничивая общности будем считать, что $\psi_k^0 = 1$.

Тогда

$$\psi_k(T_k) = W_x(T_k, x_*(T_k)).$$

В силу сопряженной системы и формулы Коши для любого $k = 1, 2, \ldots$ и произвольного $t \in [0, T_k]$ имеем

$$\psi_k(t) = Z_*(t)\,[Z_*(T_k)]^{-1}\, W_x(T_k, x_*(T_k)) + Z_*(t) \int_t^{T_k} [Z_*(s)]^{-1}\, f_x^0(s, x_*(s), u_*(s))\, ds.$$

В силу леммы 4 выполняется равенство

$$W_x(T_k, x_*(T_k)) = Z_*(T_k) \int_{T_k}^{\infty} [Z_*(s)]^{-1}\, f_x^0(s, x_*(s), u_*(s))\, ds.$$

Откуда получаем

$$\psi_k(t) \equiv \psi(t) = Z_*(t) \int_t^{\infty} [Z_*(s)]^{-1}\, f_x^0(s, x_*(s), u_*(s))\, ds, \quad t \in [0, T_k].$$

Функция $\psi(\cdot)$ определена на $[0, \infty)$, $\psi(\cdot) \in AC_{loc}[0, \infty)$. В силу леммы 4 имеем $\psi(t) = W_x(t, x_*(t))$, $t \geq 0$.

Поскольку условие максимума выполняется с $\psi_k(\cdot)$ на $[0, T_k]$, $\lim_{k\to\infty} T_k = \infty$, то оно выполняется с $\psi(\cdot)$ на $[0, \infty)$. $\Box$

$$J(x,u)=\int_0^\infty e^{-t}\ln\frac{1}{x(t)-1/2}\,dt\to\max,$$

$$\dot{x}(t)=u(t)-x(t),\qquad u(t)\in U=[1/2,1],$$

$$x(0)=1,\qquad G=(1/2,\infty).$$

Положим $G=(1/2,\infty)$. Единственный сильно оптимальный процесс:

$$x_*(t)=\frac{1+e^{-t}}{2},\quad u_*(t)\overset{\text{п.в.}}{=}\frac{1}{2}.$$

1) $\psi^0=0$. Тогда

$$\psi(t)=\psi(0)e^t\to-\infty,\quad x_*(t)\psi(t)=\frac{1+e^{-t}}{2}\psi(t)\to-\infty\quad\text{при}\quad t\to\infty.$$

2) $\psi^0=1$. Тогда $\psi(t)=(\psi(0)+2)e^t-2 \quad\Rightarrow\quad \psi(0)\le-2$.

2.1) $\psi(0)=-2$, тогда $\psi(t)\equiv-2$, $t\ge0$, $\lim_{t\to\infty}x_*(t)\psi(t)=-1$.

2.2) $\psi(0)<-2$, тогда $\lim_{t\to\infty}\psi(t)=-\infty$, $\lim_{t\to\infty}x_*(t)\psi(t)=-\infty$.

Пример 4. Продолжение

$$J(x,u) = \int_0^\infty e^{-t} \ln \frac{1}{x(t) - 1/2}\, dt \to \max ,$$

$$\dot{x}(t) = u(t) - x(t), \qquad u(t) \in U = [1/2, 1],$$

$$x(0) = 1, \qquad G = (1/2, \infty).$$

Проверим $(A1)$. Для любого допустимого $u_*(\cdot)$ и любого начального состояния $\zeta \in G$ имеем

$$x(\zeta, t) = e^{-t}(\zeta + \int_0^t e^s u_*(s)\, ds), \qquad t \geq 0.$$

Тогда для $\beta = 1/4$ и любого ζ: $|\zeta - x_0| < \beta$ при $t \geq 0$ имеем

$$|f_x(t, x(\zeta,t), u_*(t))| \equiv 1,$$

$$\left|f_x^0(t, x(\zeta,t), u_*(t))\right| \leq \frac{e^{-t}}{e^{-t}\zeta + e^{-t}(e^t - 1)/2 - 1/2} \leq 4.$$

Пример 4. Продолжение

Проверим $(A2')$. Для $\beta = 1/2$, любого $\zeta \in (1/2, 3/2)$ и любого допустимого управления $u_*(\cdot)$ интеграл $J(x(\zeta,\cdot), u_*(\cdot))$ определен и

$$x(\zeta_1, t) - x(\zeta_2, t) = (\zeta_1 - \zeta_2)e^{-t}, \qquad t \geq 0.$$

Тогда

$$\max_{\theta\in[x(\zeta_1,t),x(\zeta_2,t)]}\left|\langle f_x^0(t,\theta,u_*(t)), x(\zeta_1,t) - x(\zeta_2,t)\rangle\right|$$

$$= \max_{\theta\in[\zeta_1,\zeta_2]} \frac{e^{-t}}{\theta e^{-t} + \int_0^t e^s u_*(s)\,ds - 1/2} e^{-t}|\zeta_1 - \zeta_2|$$

$$= \max_{\theta\in[\zeta_1,\zeta_2]} \frac{e^{-t}|\zeta_1 - \zeta_2|}{\theta + e^{-t}\int_0^t e^s u_*(s)\,ds - e^t/2}$$

$$\leq \frac{e^{-t}|\zeta_1 - \zeta_2|}{2} = |\zeta_1 - \zeta_2|\lambda(t).$$

Пример 4. Окончание

В силу теоремы 4 для оптимальной пары $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ ПМП в нормальной форме выполняется с сопряженной переменной

$$\psi(t) = Z_*(t) \int_t^{\infty} [Z_*(s)]^{-1} f_x^0(s, x_*(s), u_*(s))\, ds, \quad s \geq 0,$$

Имеем

$$Z_*(s) = [Z_*(s)]^1 \equiv I, \quad f_x^0(s, x_*(s), u_*(s)) = -\frac{e^{-s}}{x_*(s) - 1/2}, \quad s \geq 0.$$

Следовательно,

$$\psi(t) = -\int_t^{\infty} \frac{e^{-s}}{x_*(s) - 1/2}\, ds < 0, \quad t \geq 0,$$

В силу условия максимума $u_*(t) \overset{\text{п.в.}}{=} 1/2$. Следовательно,

$$x_*(t) = \frac{1 + e^{-t}}{2}, \quad \psi(t) = -2, \qquad t \geq 0.$$

Пример 5. Задача об оптимальной эксплуатации невозобновляемого ресурса

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^{\infty} e^{-\rho t}\Big[\ln u(t) + \ln(x(t) - a)\Big]\, dt \to \max,$$

$$\dot{x}(t) = -u(t)(x(t) - a), \quad x(0) = x_0 > a, \quad G = (a, \infty), \quad a, \rho > 0,$$

$$u(t) > 0.$$

Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ – допустимый процесс. Тогда для $\zeta \in G$ имеем

$$x(\zeta, t) = (\zeta - a)e^{-\int_0^t u_*(s)\, ds} + a, \quad f_x^0(t, x, u_*(t)) = \frac{e^{-\rho t}}{x - a} \qquad t \geq 0.$$

Для $\beta = \frac{x_0 - a}{2}$ получаем, что если $|\zeta_i - x_0| < \beta$, $i = 1, 2$, то

$$\max_{x \in [x_*(t), x(\zeta; t)]} \Big| \langle f_x^0(t, x, u_*(t)), x(\zeta_1; t) - x(\zeta_2; t) \rangle \Big|$$

$$\overset{\text{п.в.}}{=} \max_{\theta \in [\zeta_1, \zeta_2]} \frac{e^{-\rho t} e^{-\int_0^t u_*(s)\, ds} |\zeta_1 - \zeta_2|}{|\theta - a| e^{-\int_0^t u_*(s)\, ds}} \leq \frac{2e^{-\rho t}|\zeta_1 - \zeta_2|}{|x_0 - a|}.$$

Условия $(A1)$ и $(A2')$ выполняются для любого допустимого процесса $(x_*(\cdot), u(\cdot))$.

Здесь

$$\dot{z}(t) = u_*(t)z(t) \qquad \Rightarrow \qquad Z_*(t) = e^{\int_0^t u_*(s)\,ds}, \quad t \geq 0.$$

Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — сильно оптимальный процесс. В силу Теоремы 4 процесс $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ удовлетворяет принципу максимума с

$$\psi(t) = e^{\int_0^t u_*(s)\,ds} \int_t^{\infty} \frac{e^{-\rho s} e^{-\int_0^s u_*(\xi)\,d\xi}}{(x_0 - a)e^{-\int_0^s u_*(\xi)\,d\xi}}\,ds = \frac{e^{-\rho t}}{\rho(x_0 - a)e^{-\int_0^t u_*(s)\,ds}}$$
$$= \frac{e^{-\rho t}}{\rho(x_*(t) - a)}, \quad t \geq 0.$$

Условие максимума влечет

$$u_*(t) \overset{\text{п.в.}}{=} \frac{e^{-\rho t}}{(x_*(t) - a)\psi(t)}, \qquad t \geq 0.$$

следовательно,

$$u_*(t) \overset{\text{п.в.}}{=} \rho, \qquad t \geq 0.$$

Следовательно,

$$x_*(t) = (x_0 - a)e^{-\rho t} + a, \qquad t \geq 0.$$

Подставляя $x_*(t)$ в формулу для $\psi(t)$ получаем

$$\psi(t) \equiv \frac{1}{\rho(x_0 - a)}, \qquad t \geq 0.$$

В случае $a > 0$ оба стандартные условия трансверсальности на бесконечности нарушаются:

$$\psi(t) \nrightarrow 0, \quad \langle \psi(t), x_*(t) \rangle \nrightarrow 0, \quad \text{при} \quad t \to \infty,$$

в то время как формула

$$\psi(t) = Z_*(t) \int_t^{\infty} \Big[Z_*(s) \Big]^{-1} f_x^0(s, x_*(s), u_*(s))\, ds, \quad t \geq 0,$$

выделяет единственный сильно оптимальный процесс.

Обсуждение теоремы 4

1) Несобственный интеграл $J(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ сходится.
2) $(A2')$: Существуют такие $\beta > 0$ и интегрируемая функция $\lambda(\cdot)$, что для любого $\zeta \in G$, $\|\zeta - x_*(0)\| < \beta$ решение $x(\zeta;\cdot)$ задачи Коши $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u_*(t))$, $x(0) = \zeta$, существует в G на $[0,\infty)$ и для любых $\|\zeta_i - x_*(0)\| < \beta$, $i = 1, 2$, имеем

$$\max_{\theta\in[x(\zeta_1;t),x(\zeta_2;t)]} \left|\langle f_x^0(t,\theta,u_*(t)), x(\zeta_1;t) - x(\zeta_2;t)\rangle\right| \overset{\text{п.в.}}{\leq} \|\zeta_1 - \zeta_2\|\lambda(t).$$

3) Для любого $\zeta \in \mathbb{R}^n$: $\|\zeta - x_*(0)\| < \beta$, для $(x(\zeta;\cdot), u_*(\cdot))$ выполняется $(A1)$, т.е. существуют такие непрерывная положительная функция $\gamma(\cdot)$ и локально интегрируемая функция $\nu(\cdot)$, что $\{x\colon \|x - x_*(t)\| \leq \gamma(t)\} \subset G$ для всех $t \geq 0$, и для п.в. $t \in [0,\infty)$ выполняется неравенство

$$\max_{\{x\colon \|x - x_*(t)\| \leq \gamma(t)\}} \left\{\|f_x(t,x,u_*(t))\| + \|f_x^0(t,x,u_*(t))\|\right\} \leq \nu(t).$$

Условие сходимости $J(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ несущественно. Условие $(A2')$ можно ослабить до условия $(A2)$.

(A2) *Существуют такие число $\beta > 0$ и интегрируемая функция $\lambda : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}^1$, что для любого $\zeta \in G$, $\|\zeta - x_*(0)\| < \beta$ решение $x(\zeta; \cdot)$ задачи Коши $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u_*(t))$, $x(0) = \zeta$, существует в G на $[0, \infty)$ и*

$$\max_{\theta \in [x(\zeta;t), x_*(t)]} \left| \langle f_x^0(t, \theta, u_*(t)), x(\zeta; t) - x_*(t) \rangle \right| \overset{\textit{п.в.}}{\leq} \|\zeta - x_*(0)\| \lambda(t).$$

Если $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ удовлетворяет $(A1)$ и $(A2)$, то в силу леммы 1

$$\left\| [Z_*(t)]^{-1} f_x^0(t, x_*(t), u_*(t)) \right\| \leq \sqrt{n} \lambda(t) \quad \text{при п.в.} \quad t \geq 0.$$

Следовательно, функция $\psi(\cdot)$, заданная равенством

$$\psi(t) = Z_*(t) \int_t^\infty [Z_*(s)]^{-1} f_x^0(s, x_*(s), u_*(s))\, ds, \quad t \geq 0,$$

определена корректно и является решением сопряженной системы.

Ослабить условие $(A2)$ до условия сходимости несобственного интеграла в определении $\psi(\cdot)$ нельзя.

Теорема 5. *Пусть* $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ — *слабо обгоняюще оптимальный процесс в* (P). *Предположим, что выполняются условие регулярности* $(A1)$ *и условие роста* $(A2)$. *Тогда функция* $\psi\colon\ [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$, *определенная равенством*

$$\psi(t) = Z_*(t)\int_t^{\infty} [Z_*(s)]^{-1} f_x^0(s, x_*(s), u_*(s))\, ds, \quad t \geq 0,$$

локально абсолютно непрерывна и удовлетворяет основным соотношениям П.М.П. в нормальной форме, т.е.

(i) *функция* $\psi(\cdot)$ *является решением сопряженной системы*

$$\dot{\psi}(t) = -\mathcal{H}_x(t, x_*(t), u_*(t), \psi(t)),$$

(ii) *выполняется условие максимума:*

$$\mathcal{H}(t, x_*(t), u_*(t), \psi(t)) \overset{\text{п.в.}}{=} H(t, x_*(t), \psi(t)).$$

В теореме 5 сходимость функционала $J(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ не предполагается.

Пример 6. Роль условия роста $(A2)$

$$J(x(\cdot),u(\cdot)) = \int_0^{\infty} e^{-t}\left[u(t) - 5x(t)^2\right] dt \to \max\,,$$

$$\dot{x}(t) = (u(t) + x(t))\,\phi(x(t)), \quad x(0) = 0, \quad G = (-2,2),$$

$$u(t) \in [0,1].$$

Здесь $\phi : \mathbb{R}^1 \to [0,1]$ – такая гладкая функция, что $\phi(x) \equiv 1$ если $|x| \le 1$, и $\phi(x) \equiv 0$ если $|x| \ge 2$.

В этом примере $x_*(t) \equiv 0$, $u_*(t) \overset{\text{п.в.}}{=} 0$, $t \ge 0$. Имеем

$$\dot{z}(t) = -z(t) \qquad \Rightarrow \qquad Z_*(t) = e^{-t}, \quad t \ge 0,$$

$$f_x^0(t, x_*(t), u_*(t)) = -10x_*(t)e^{-t} \equiv 0, \quad t \ge 0.$$

Следовательно,

$$\psi(t) = Z_*(t)\int_t^{\infty} Z_*^{-1}(s) f_x^0(s, x_*(s), u_*(s))\, ds \equiv 0, \qquad t \ge 0.$$

Однако, для $x_*(t) \equiv 0$, $u_*(t) \overset{\text{п.в.}}{=} 0$ и $\psi(t) \equiv 0$ имеем

$$0 \overset{\text{п.в.}}{=} u_*(t)\left(e^{-t} + \psi(t)\right) \overset{\text{п.в.}}{\neq} \max_{u\in[0,1]}\left[u\left(e^{-t} + \psi(t)\right)\right] \equiv e^{-t}, \quad t \ge 0.$$

В этом примере

$$\mathcal{H}(t,x,u,\psi) = (u+x)\phi(x)\psi + e^{-t}[u-5x^2], \quad t \geq 0,\ x \in G,\ u \in [0,1].$$

и основные соотношения ПМП в нормальной форме (с $\psi^0 = 1$) имеют вид

$$\dot{\psi}(t) = -\psi(t), \qquad \max_{u\in[0,1]} \left[u\left(e^{-t} + \psi(t)\right)\right] \overset{\text{п.в.}}{=} 0, \quad t \geq 0.$$

П.М.П. в нормальной форме для $x_*(t) \equiv 0$, $u_*(t) \overset{\text{п.в.}}{=} 0$, $t \geq 0$ выполняется с

$$\psi(t) = -e^{-t}, \qquad t \geq 0.$$

Для этой сопряженной переменной выполняется стандартное условие трансверсальности на бесконечности

$$\psi(t) \to 0 \qquad \text{при} \qquad t \to \infty,$$

а представление ★ нет.

Для пары $x_*(t) \equiv 0$, $u_*(t) \overset{\text{п.в.}}{=} 0$, $t \geq 0$, условие $(A2)$ нарушается. Пусть это не так. Тогда существуют $0 < \beta < 1$ и неотрицательная интегрируемая функция $\lambda(\cdot)$: для $|\zeta| < \beta$ имеем

$$\max_{\theta \in [x(\zeta;t), x_*(t)]} \left| \langle f_x^0(t, \theta, u_*(t)), x(\zeta; t) - x_*(t) \rangle \right| \overset{\text{п.в.}}{\leq} |\zeta| \lambda(t), \quad t \geq 0.$$

Фиксируем $t \geq -\ln \beta$ - точку аппроксимативной непрерывности $\lambda(\cdot)$. Для любого ζ: $\zeta \in [0, e^{-t}]$ траектория $x(\zeta; \cdot)$, соответствующая $u_*(\tau) \overset{\text{п.в.}}{=} 0$ и $x(0) = \zeta$ есть $x(\zeta; \tau) = \zeta e^{\tau}$, $\tau \in [0, t]$.
Для каждого $\zeta \in [0, e^{-t}] \subset [0, \beta]$ при п.в. $\tau \in [0, t]$ имеем

$$\max_{\theta \in [x(\zeta;\tau), x_*(\tau)]} \left| \langle f_x^0(\tau, \theta, u_*(\tau)), x(\zeta; \tau) \rangle \right| = 10\zeta^2 e^{\tau} \leq \zeta \lambda(\tau).$$

Выбирая $\tau \to t - 0$ по множеству непрерывности $\lambda(\cdot)$ получаем

$$10\zeta e^t \leq \lambda(t).$$

Устремляя теперь ζ к e^{-t} получаем $\lambda(t) \geq 10$ при п.в. $t \geq -\ln \beta$, что противоречит интегрируемости $\lambda(\cdot)$.

Литература

[9] Асеев С.М., Функция условной стоимости и необходимые условия оптимальности для задач оптимального управления с бесконечным горизонтом, Докл. РАН. Матем., информ., проц. упр., 514:1 (2023), 5–11.

[10] Асеев С.М., О некоторых свойствах сопряженной переменной в соотношениях принципа максимума для задач оптимального экономического роста, Труды Ин-та математики и механики УрО РАН, 19, № 4 (2013), 15–24.

[11] Асеев С.М., Вельов В.М., Другой взгляд на принцип максимума для задач оптимального управления с бесконечным горизонтом в экономике, УМН, 74:6 (2019), 3–54.

[12] Aseev S.M., Veliov, V.M., Maximum principle for infinite-horizon optimal control problems under weak regularity assumptions, Труды Ин-та математики и механики УрО РАН, 20 (2014), 41–57.